

**APROXIMACIONES PRÁCTICAS A LAS FUNCIONES DE THEIS Y HANTUSH
PARA ACUÍFEROS CONFINADOS Y SEMI CONFINADOS
THEIS AND HANTUSH FUNCTIONS APPROXIMATIONS FOR CONFINED AND
LEAKY AQUIFERS**

Luis E. Mora .M¹. Hervé J. Jégat N.¹ Néstor J. Méndez² Jesús E. Mejías D.¹

¹ Grupo de Investigación PEGASUS del Centro Interamericano de Desarrollo e
Investigación Ambiental y Territorial de la Universidad de Los Andes
luismora@ula.ve; hjegat@ula.ve; jmejias@ula.ve

² Profesor Titular. PHD Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado.
nmendez@ucla.edu.ve

Recibido: 15-02-2011 Aceptado: 14-03-2011

RESUMEN

Con el objetivo de encontrar aproximaciones prácticas para las funciones de pozo de Theis (1935) para acuíferos confinados y Hantush (1955) para semi-confinados, que puedan implementarse en una calculadora de mano o en una hoja de cálculo de software libre, ejemplo: Open Office Versión 3.0 o superior; se realiza una revisión de las propuestas históricas de la aproximación de la función pozos hasta las más recientes propuestas por Prodanoff *et al.* (2006). Las expresiones obtenidas se basan parcialmente en aproximaciones de series alternantes mediante la aplicación del algoritmo épsilon-escalar de aceleración de convergencia (Guilpin, 1999) y modificación de las propuestas realizadas por Tseng y Lee (1998) para acuíferos confinados y semi-confinados. Se realiza una comparación del error relativo cometido con la solución exacta que se encuentra resolviendo las integrales originales mediante Math-Cad®, con un error absoluto menor o igual a 1×10^{-12} para ambas integrales, obteniéndose que las soluciones propuestas presentan un error relativo menor al 1% para rangos de u entre 100 y 1×10^{-7} y valores usuales de r/b menores a 20. Además de encontrar expresiones para cada rama asintótica de valores de $u \leq 1$ y $u > 1$. Se aplican operadores trigonométricos hiperbólicos que permiten encontrar funciones continuas en todo el dominio estudiado. Las expresiones encontradas se presentan para utilidad de los hidrogeólogos prácticos y para facilitar la enseñanza y ajuste rápido de pruebas de bombeo sin necesidad de utilizar software especializado.

Palabras Clave: Aproximaciones; función de pozo; acuífero confinado y semi confinado; error absoluto y relativo.

SUMMARY

In order to obtain a practical approximation of the Well function developed by Theis for confined aquifers, and by Hantush for leaky aquifers, that can be used in hand held calculators or included in freeware spreadsheets, a complete revision of historical approaches including the most recent presented by Prodanoff et al. in 2006, was carried out. The final equations are based on approximations of alternating series using the epsilon scalar algorithm with convergence acceleration (Guilpin, 1999) and the modifications made by Tseng and Lee (1998) for confined and leaky aquifers. The final solutions was compared with the exact solutions provided by Math-Cad, obtaining an absolute error value less than 10^{-12} for both integrals and a relative error less than 1 % for values of u between 100 and 10^{-7} with usual values of r/B less than 20. Furthermore, analytical solutions were found the asymptotical parts of the curve. Trigonometric and hyperbolic operators were used to obtain continuous functions all over the study domain. The proposed expressions can be useful for practical hydrogeologists and also for teaching pumping tests analysis without using commercial software.

Key words: *well function approximation; confined aquifer; leaky aquifer; absolute and relative error.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es presentar aproximaciones prácticas para las funciones de pozo de Theis (1935) y Hantush *et al.* (1955) una vez revisadas las propuestas existentes.

Las funciones de Theis y Hantush son las proposiciones mas usadas en el ámbito del análisis de pruebas de bombeo, es por esta razón que siempre es conveniente tener a la mano aproximaciones de estas funciones que ayuden al análisis de una manera expedita sin necesidad de contar con software especializado. El advenimiento de las hojas de cálculo, y calculadoras de mano, programables reclama la formulación de propuestas sencillas y en todo caso de fácil programación en estos dispositivos.

REVISIÓN DE LAS PROPUESTAS

Theis (1935) propone una expresión para el análisis de descensos en acuíferos confinados, conocida como la solución de Theis y en otros campos como la integral exponencial que se presenta como Ecuación (1).

$$W(u) = E_1(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = -\gamma - \ln(u) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u^i}{i * i!} (-1)^{i+1} \quad u: \frac{r^2 S}{4Tt} > 0 \quad (1)$$

Donde:

γ : es la constante de Euler cuyo valor aproximado es igual a 0.5772156649015329

u : función de tiempo adimensional cuyos parámetros son:

- r : distancia de observación
- S : coeficiente de almacenamiento
- T : transmisividad
- t : tiempo

Cooper *et al.* (1946) citados por Hantush *et al.* (1955) proponen una simplificación truncando la serie, la cual se puede escribir tal como se presenta en la Ecuación (2).

$$W(u) = \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) \quad \text{simplificada} \quad W(u) = \ln\left(\frac{2.25}{4u}\right) \quad u \leq 0.01 \quad (2)$$

Es conveniente hacer notar que la integral exponencial es también usada más allá del ámbito hidrogeológico como por ejemplo en la física matemática, lo que ocasiona que su estudio haya sido intensivo en los últimos 60 años, en los cuales, se han propuesto varias aproximaciones, cuyas estrategias se basan en asegurar convergencia para valores de $u \leq 1$ y mayores que este, dentro de estas se tienen las de Allen (1954) y Hastings (1955), Cody *et al.* (1968) citados por Prodanoff *et al.* (2006), Srivastava *et al.* (1998). En todo caso han

sido pocas las formulaciones que buscan abarcar todo el espacio de posibles valores en las que cabe mencionar las de Swamee *et al.* (1990), Barry *et al.* (2000) y la de inversión de la transformada de Laplace por el método de Stehfest (1979) recomendada por Tseng *et al.* (1998). El Cuadro 1 muestra las formulaciones antes mencionadas escritas en su mayoría en MathCad ®

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE LA FUNCIÓN DE POZO $W(u)$

Tseng *et al.* (1998) plantean que al menos se han propuesto seis (6) métodos de resolución, a saber: expansión de la serie alternante, expansión asintótica, fracciones continuas, aproximaciones polinómicas y racionales, relaciones de recurrencia e integración por cuadratura numérica. Con base en las propuestas históricas, y dada la naturaleza de la función a estudiar; este trabajo plantea la resolución de la función de pozo estudiando soluciones sencillas para u menor o igual a 1, soluciones para u mayor que 1, y funciones continuas que consideren todo el dominio, útiles para el caso de procesos de optimización, en la cual las derivadas requieren continuidad.

Solución simplificada de $W(u)$ para $u < 1$

Para $u < 1$ se ha considerado típicamente la serie alternante expresada en la Ecuación 1, esta solución se ha adoptado preferiblemente solo para valores de $u < 1$, debido a que para $u > 1$, la substracción de términos con cantidades muy cercanas se traduce en una pérdida de precisión que compromete su convergencia. Sin embargo, como se verá mas adelante, las soluciones podrán aplicarse para valores de u ligeramente mayores a 1.

Cuadro 1. Resumen de propuestas mas relevantes para la función de pozo $W(u)$

<p>Allen(1954) y Hastings (1955) todo el dominio $0 < u \leq \infty$</p> $W_{A_H}(u) := \begin{cases} \ln\left(\frac{e^{-Y}}{u}\right) + 0.99999193u - 0.24991055u^2 + 0.05519968u^3 - 0.00976004u^4 + 0.00107857u^5 & \text{if } u \leq 1 \\ \frac{1}{u \cdot e^u} \left(\frac{0.2677737343 + 8.6347608925 \cdot u + 18.0590169730 \cdot u^2 + 8.5733287401 \cdot u^3 + u^4}{3.9584969228 + 21.0996530827 \cdot u + 25.6329561486 \cdot u^2 + 9.5733223454 \cdot u^3 + u^4} \right) & \text{if } u > 1 \end{cases} \quad (3)$

Cody *et al.* (1968) $1 < u \leq \infty$

$$WuCT(u) := -\ln(u) + \frac{5.019678519 \cdot u^6 + 116.6955267 \cdot u^5 + 2150.067291 \cdot u^4 + 15924.17598 \cdot u^3 + 89904.97201 \cdot u^2 + 150260.5948 \cdot u - 148151.0}{256664.93489 + 184340.7006 \cdot u + 52440.52917 \cdot u^2 + 8125.803517 \cdot u^3 + 750.4316391 \cdot u^4 + 40.20546564 \cdot u^5 + u^6} \quad (4)$$

Swamee *et al.* (1990) continua en todo el dominio $0 < u \leq \infty$

$$WuSO(u) := \left[\ln \left[\left(\frac{0.5614}{u} + .65 \right) (1 + u) \right]^{-7.7} + u^4 e^{7.7u} (2 + u)^{3.7} \right]^{-.13} \quad (5)$$

Srivastava *et al.* (1998) todo el dominio $0 < u \leq \infty$

$$WuSriG(u) := \begin{cases} \ln \left(\frac{e^{-\mathbf{Y}}}{u} \right) + 0.9653 \cdot u - 0.1690 \cdot u^2 & \text{if } u \leq 1 \\ \frac{1}{u \cdot e} \frac{(u + .3575)}{(u + 1.28)} & \text{if } u > 1 \end{cases} \quad (6)$$

Barry *et al.* (2000) continua en todo el dominio $0 < u \leq \infty$

$$G = e^{-\gamma} \quad b = \sqrt{\frac{2^*(1-G)}{G^*(2-G)}} \quad h_\infty = \frac{(1-G)(G^2 - 6G + 12)}{3G(2-G)^2 b} \quad q = \frac{20}{47} u^{\sqrt{\frac{31}{26}}} \quad h = \frac{1}{1 + u\sqrt{u}} + \frac{h_\infty q}{(1+q)}$$

$$WuBP(u) = \frac{e^{-u} \ln \left(1 + \frac{G}{u} - \frac{1-G}{(h+bu)^2} \right)}{\left(G + (1-G)e^{\left(\frac{-u}{1-G} \right)} \right)} \quad (7)$$

Con base en lo anterior; y en la búsqueda de una solución práctica que involucre el desarrollo de pocos términos, se utiliza el algoritmo de aceleración de convergencia Epsilon- Escalar, el cual según expresa Guilpin (1999), es uno de los algoritmos mas potentes utilizados para la aceleración de convergencia de series. El algoritmo se expresa en la Ecuación (8), la cual es válida para un desarrollo mínimo de tres términos.

$$S_k^{(p)} = S_{k+1}^{(p-2)} + \frac{1}{S_{k+1}^{(p-1)} - S_k^{(p-1)}} \quad (8)$$

Donde:

p = es el paso de cálculo

k = el termino de la serie, siendo $k = 0, 1, \dots, (n-p+1)$ en el cual n son los términos a considerar.

$k = 0$, significa la serie original

Ahora bien, al aplicar el algoritmo Epsilon-Escalar al desarrollo de la serie alternante de la Ecuación (1), para tres (3) términos se obtienen las Ecuaciones (9) y (10) en forma racional, en las cuales se requiere de parámetros enteros adicionales a la conocida simplificación de Jacob, cuya convergencia y errores relativos se presentarán mas adelante.

$$W3t(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{36u - u^2}{8u + 36} \quad (9)$$

$$W5t(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{41 \cdot u^3 + 774u^2 + 9000u}{297 \cdot u^2 + 3024u + 9000} \quad (10)$$

Se puede observar que ambas funciones racionales equivalentes en las Ecuaciones 9 y 10 son de grado uno, lo que garantiza convergencia para valores de u menores a la unidad. Esto último anima a la búsqueda de expresiones racionales empíricas que pudieran eventualmente mejorar la aproximación al menos asegurando la presencia de mínimos locales en zonas críticas tal como se presentan mas adelante.

Errores absolutos y relativos

Generalmente suelen expresarse los errores en términos absolutos, sin embargo, cuando la función a representar toma valores muy pequeños, pudiera encontrarse que la magnitud del error puede estar en el mismo orden de la función misma. En este caso; y para efectos prácticos de utilización, interesa conocer el error relativo de la aproximación. Con base en lo anterior; y de manera similar a lo propuesto por Tseng *et al.* (1998), se considerará el error relativo, pero en porcentaje, tal como lo expresa la Ecuación (11).

$$Error_Relativo \% = 100 * \left| \frac{(Valor_Verdadero) - (Valor_Aproximado)}{Valor_Verdadero} \right|$$

(11)

Donde: el valor verdadero puede ser obtenido mediante tablas o mediante integración numérica de la función exponencial a una tolerancia dada, ejemplo: MathCad ®

En general, para efectos de aproximaciones prácticas se puede aceptar hasta 1% de error relativo y con base a esto, se recomiendan los límites de utilización de las expresiones encontradas. Simplificando aún más el número de Euler, la expresión de Jacob para una implementación sencilla se presenta en el Cuadro 2, variantes de las Ecuaciones (9) y (10) con optimización de mínimos locales y los respectivos errores relativos. Para este Cuadro, el valor verdadero de la función de pozo se obtiene a partir de la integración numérica en MathCad® combinada con un desarrollo de la serie hasta 120 términos. Se puede observar en el Cuadro 2, los límites de utilización para las series originales, comprobándose que el algoritmo de aceleración de convergencia Epsilon-Escalar, mejora efectivamente la convergencia de la serie original.

Cuadro 2. Rango de utilización de las simplificaciones encontradas con errores relativos menores al 1%

$W_{\text{serie}}(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \sum_{i=1}^3 \frac{(-1)^{i+1} \cdot u^i}{i \cdot i!}$ <p>Serie original (3) términos $u \leq 0.77$ (12)</p>	$W_{3t}(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{36u - u^2}{8u + 36}$ <p>Serie 3t Acelerada mediante Epsilon-escalar $u \leq 1.13$ (9)</p>
$W_{3tee}(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \left(\frac{36.47u - u^2}{8u + 36.47}\right)$ <p>Serie 3t. Epsilon-Esc. Optimización local $u \leq 1.56$ (13)</p>	$W_{3tea}(u) := \ln\left(\frac{2.25}{4u}\right) + \frac{35.882 \cdot u - u^2}{8 \cdot u + 35.882}$ <p>Simplificación de Jacob más Serie 3t Epsilon-Escalar Optimización Local $u \leq 1.25$ (14)</p>
$W_{\text{serie}}(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \sum_{i=1}^5 \frac{(-1)^{i+1} \cdot u^i}{i \cdot i!}$ <p>Serie original (5) términos $u \leq 1.35$ (15)</p>	$W_{5t}(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{41 \cdot u^3 + 774 \cdot u^2 + 9000 \cdot u}{297 \cdot u^2 + 3024 \cdot u + 9000}$ <p>Serie 5t Acelerada mediante Epsilon-escalar $u \leq 2.15$ (10)</p>

$W5tee(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{u \cdot (41u^2 + 774u + 8983)}{(297u^2 + 3024u + 8983)}$ <p style="text-align: center;">Serie 5t. Epsilon-Esc. Optimización local</p> <p style="text-align: right;">$u \leq 2.72$ (16)</p>	$W5tea(u) := \ln\left(\frac{2.25}{4 \cdot u}\right) + \frac{u \cdot (41u^2 + 774u + 8946)}{1 \cdot (297u^2 + 3024u + 8946)}$ <p style="text-align: center;">Simplificación de Jacob m Serie 5t Epsilon-Escalar Optimización Local</p> <p style="text-align: right;">$u \leq 2.94$ (17)</p>
--	---

Expresiones racionales empíricas

Tal como se ha comentado, es posible encontrar expresiones racionales de grado uno que puedan utilizarse para valores de u mayores a los obtenidos anteriormente para asegurar una mayor amplitud en la utilización práctica, a tal efecto se presentan las Ecuaciones (18) y (19) que se obtienen combinadas con la formulación original de Jacob y una simplificación practica de la misma.

$$Wempe(u) := \ln\left(\frac{e^{-\gamma}}{u}\right) + \frac{4.3096 \cdot u^3 + 205.371 \cdot u^2 + 1163.70 \cdot u}{64.2779 \cdot u^2 + 496.1083 \cdot u + 1163.70} \quad u \leq 4.12$$

(18)

$$Wempa(u) := \ln\left(\frac{2.25}{4 \cdot u}\right) + \frac{0.0414 \cdot u^3 + 1.9704 \cdot u^2 + 11.1641 \cdot u - 0.0207}{0.6171 \cdot u^2 + 4.7627 \cdot u + 11.173} \quad u \leq 3.87$$

(19)

Estas expresiones empíricas aunque pueden aplicarse a un rango mayor de valores de u , su convergencia es mucho más lenta para valores de u pequeños en comparación a las soluciones encontradas con el algoritmo Epsilon-Escalar.

Solución para $W(u)$ y $u \gg 1$

Para valores de $u > 1$, se han propuesto en la literatura, expansiones asintóticas, sin embargo, del trabajo de Tseng *et al.* (1998), se desprende que la integración de Gauss-

Laguerre es un esquema altamente eficiente para valores de $u \gg 1$. Así pues, bajo el esquema de integración de Gauss-Laguerre. La Función $W(u)$ puede reescribirse para su integración tal como lo muestra la Ecuación (20).

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad \rightarrow \quad W(u) = e^{-u} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) * dx \quad \rightarrow \quad W(u) = e^{-u} \sum_{i=1}^{N_{puntos}} w_i * \frac{1}{u + x_i}$$

(20)

Donde:

N_{puntos} : Es el número de puntos de integración seleccionado

w_i : son los pesos de la cuadratura de Gauss-Laguerre para N_{puntos}

x_i : son las respectivas raíces de los polinomios de Laguerre para N_{puntos}

Los valores de los pesos y raíces se pueden encontrar en Abramovich *et al.* (1965) y NIST (2010).

Aplicando el esquema de integración de Gauss-Laguerre para tres (3) y cinco (5) pesos se obtienen las expresiones racionales equivalentes mostradas en las Ecuaciones (21) y (22) cuyos valores son enteros, debido a que las particularidades de la transformación hace que como denominador se reproduzcan en esencia los polinomios de Laguerre originales, sin los términos alternantes.

$$W_{lag3}(u) := \left(\frac{u^2 + 8u + 11}{u^3 + 9u^2 + 18u + 6} \right) \cdot e^{-u} \quad u \geq 1.15 \quad (21)$$

$$W_{lag5}(u) := \left(\frac{274 + 444 \cdot u + 177 \cdot u^2 + 24 \cdot u^3 + u^4}{120 + 600 \cdot u + 600 \cdot u^2 + 200 \cdot u^3 + 25 \cdot u^4 + u^5} \right) \cdot e^{-u} \quad u \geq 0.57 \quad (22)$$

Donde: $W_{lag3}(u)$ y $W_{lag5}(u)$ son las funciones racionales derivadas de la integración por Gauss-Laguerre para (3) y (5) puntos de integración, respectivamente.

Propuestas prácticas para el dominio ($0 \leq u \leq 100$)

Con base en las diferentes expresiones encontradas, se proponen la Ecuación (23) con un error relativo máximo de 0,83% y la Ecuación (24) con un error máximo de 0,06 % como propuestas prácticas, en las cuales, se ha optimizado el valor de u límite para minimizar las diferencias numéricas entre las expresiones para este valor.

$$\begin{aligned}
 W_{tw1}(u) &:= \begin{cases} \ln\left(\frac{2.25}{4u}\right) + \frac{35.882 \cdot u - u^2}{8 \cdot u + 35.882} & \text{if } u \leq 1.23 \\ \left(\frac{u^2 + 8u + 11}{u^3 + 9u^2 + 18u + 6}\right) \cdot e^{-u} & \text{if } u > 1.23 \end{cases} & (23) \\
 W_{tw2}(u) &:= \begin{cases} \left(\frac{u^2 + 8u + 11}{u^3 + 9u^2 + 18u + 6}\right) \cdot e^{-u} & \text{if } u > 3.26 \\ \ln\left[\frac{2.25}{(4u)}\right] + \frac{0.0414 \cdot u^3 + 1.9704 \cdot u^2 + 11.1641 \cdot u - 0.0207}{0.6171 \cdot u^2 + 4.7627 \cdot u + 11.173} & \text{if } u \leq 3.26 \end{cases} & (24)
 \end{aligned}$$

Búsqueda de una expresión práctica y continua

Son pocas las expresiones prácticas y continuas que se han planteado para que tomen todo el rango de valores de u , entre las que se destacan la propuesta de Swamee *et al.* (1990) y Barry *et al.* (2000). Se establece como estrategia, la búsqueda de una función que pudiera servir de conexión entre las soluciones eficientes ya encontradas para valores de $u \leq 1$ y aquellos mayores a uno. Es decir, una función que tienda a uno (1) cuando u tome valores grandes o muy grandes y que tienda a cero (0) cuando u tienda a cero (0). De la formulaciones matemáticas clásicas se encuentra que las funciones trigonométricas hiperbólicas cumplen con esta condición, por ejemplo $\tanh(u)$, solo basta buscar la forma de acelerar su convergencia con la finalidad de que se respeten las formulaciones originales o que en todo caso que en la zona de tendencia asintótica no introduzca errores mayores a los tolerables.

Con base en lo anterior, los autores de este trabajo presentan dos expresiones prácticas que cumplen con esta condición. La Ecuación (25) presenta un error máximo relativo de 0,56% en todo el dominio de $u > 0$. La Ecuación (26) es válida para todo el dominio analizado, con un error relativo máximo menor al 0,03% mejorando así, el error

máximo de la combinación optimizada de las expresiones originales propuestas para cada rama asintótica de valores de u .

$$Wc1(u) := \left[1 - \left[\sin \left[\left(\tanh(u) \right)^3 \frac{\pi}{2} \right] \right]^2 \right] \left(\ln \left(\frac{e^{-\gamma}}{u} \right) + \frac{36.47 \cdot u - u^2}{8u + 36.47} \right) + \left[\left[\sin \left[\left(\tanh(u) \right)^3 \frac{\pi}{2} \right] \right]^2 \right] \left[\left(\frac{u^2 + 8u + 11.0}{u^3 + 9u^2 + 18u + 6} \right) \cdot e^{-u} \right] \quad (25)$$

$$Wc2(u) := \left[1 - \left[\sin \left[\left(\tanh(u) \right)^4 \frac{\pi}{2} \right] \right]^3 \right] \left(\ln \left(\frac{e^{-\gamma}}{u} \right) + \frac{0.41 \cdot u^3 + 7.74 \cdot u^2 + 90 \cdot u}{2.97 \cdot u^2 + 30.24 \cdot u + 90} \right) + \left[\frac{(274 + 444 \cdot u + 177 \cdot u^2 + 24 \cdot u^3 + u^4) \cdot e^{-u}}{(120 + 600 \cdot u + 200 \cdot u^3 + 600 \cdot u^2 + 25 \cdot u^4 + u^5)} \right] \cdot \left[\sin \left[\left(\tanh(u) \right)^4 \frac{\pi}{2} \right] \right]^3 \quad (26)$$

La Figura 1 muestra los errores relativos de las expresiones propuestas en un dominio de $1 \times 10^{-7} \leq u \leq 1 \times 10^2$, así como las propuestas de simplificaciones más relevantes encontradas en las literaturas.

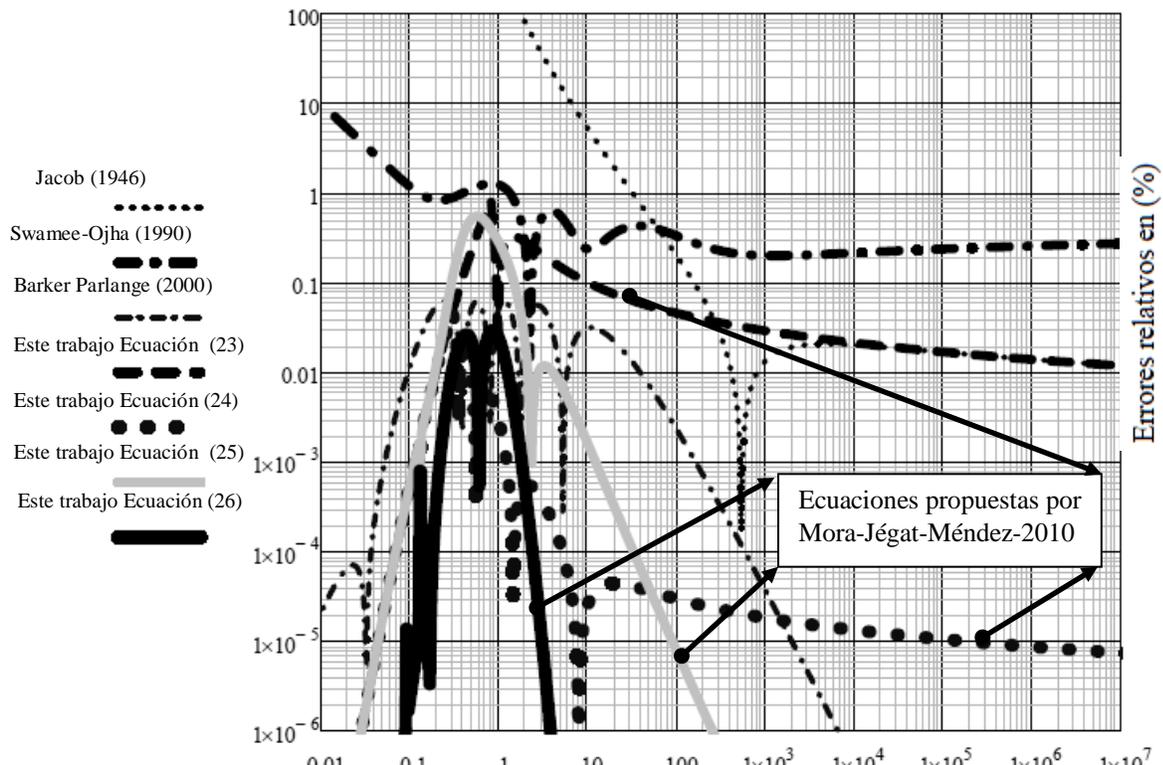


Figura 1. Errores relativos de las expresiones propuestas y encontradas en la literatura

ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DE HANTUSH EN ACUÍFEROS SEMI-CONFINADOS

Hantush propone la Ecuación (27) para acuíferos semi-confinados donde rb es la relación entre el radio y el factor de goteo, la cual será la expresión a simplificar.

$$w_{urb}(u, rb) := \int_u^{\infty} \frac{e^{\left(-y - \frac{rb^2}{4y}\right)}}{y} dy \quad (27)$$

Estrategia para $u \leq 1$

Para este rango de valores, se ha encontrado una alta eficiencia práctica en la inversión de la transformada de Laplace mediante el método de Stehfest (1970), el cual de forma simplificada para su utilización práctica se presenta en la Ecuación (28).

$$W(u, r/b) \cong \sum_{i=1}^{npesos} w_{m_i} K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + u \ln(16) i} \right) \quad (28)$$

Donde:

w_{m_i} : pesos modificados para aplicación directa provenientes de Stehfest.

$K_0(x)$: función de Bessel modificada de segunda especie y orden cero disponible en hojas de cálculo o de las aproximaciones racionales de Abramovich *et al.* (1965).

Las pruebas numéricas indican que se pueden utilizar hasta 10 pesos para un error menor al 1% si $u < 1$ y $r/b < 18.5$, lo cual es suficiente para efectos prácticos. El Cuadro 3 presenta los 12 pesos modificados escritos en forma de fracción con la finalidad de no perder precisión en los mismos. La integración numérica de la ecuación de Hantush para la comparación de errores relativos se realiza mediante MathCad®

Cuadro 3. Pesos modificados para el método de Stehfest

$w_{m1} =$	$w_{m2} =$	$w_{m3} =$	$w_{m4} =$	$w_{m5} =$
1/6	-385/12	2558/3	-46871/6	101093/3
$w_{m6} =$	$w_{m7} =$	$w_{m8} =$	$w_{m9} =$	$w_{m10} =$
-473915/6	322210/3	-1020215/12	109375/3	-13125/2

Estrategia para $u > 1$

De manera similar a la estrategia utilizada para $W(u)$, se encuentra alta eficiencia en la integración de la función de Hantush para valores $u > 1$ mediante el método de Gauss-Laguerre, estimándose que sólo 5 pesos son suficientes para obtener errores relativos menores a 1% para $r/b \leq 20$, cuando se combinan ambas ramas asintóticas mediante los operadores discutidos anteriormente. Así pues, se presenta la Ecuación (29), que resume la aplicación para valores de $u > 1$.

$$W_{urb15}(u, rb) := \frac{1}{e^u} \cdot \sum_{i=1}^5 \left[w_{l5_i} \cdot \frac{1}{(u + x_{l5_i}) \cdot e^{\left[\frac{rb^2}{4 \cdot (x_{l5_i} + u)} \right]}} \right] \quad w_{l5} := \begin{pmatrix} 5.21755610583E-001 \\ 3.98666811832E-001 \\ 7.59424496817E-002 \\ 3.61175867992E-003 \\ 2.33699723858E-005 \end{pmatrix} \quad x_{l5} := \begin{pmatrix} 2.63560319718E-01 \\ 1.41340305911E+00 \\ 3.59642577104E+00 \\ 7.08581000586E+00 \\ 1.26408008443E+01 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Donde:

W_{urb15} : Aproximación de la función de Hantush mediante integración de Gauss-Laguerre
 $rb = r/b$: w_{l5} y x_{l5} son los respectivos pesos y raíces para la integración por Laguerre.

Expresiones prácticas y continuas

Utilizando los operadores $\tanh(u)$ para asegurar continuidad de las propuestas se presentan 2 aproximaciones, la primera representada por la Ecuación (30), puede ser usada para valores de $r/b \leq 2.0$ y $0 \leq u \leq 100$, obteniéndose errores relativos menores al 1%. La segunda formulación, representada por la Ecuación (31) puede ser usada para valores de $r/b \leq 20$ y $0 \leq u \leq 100$.

$$Wurb1(u, rb) := \left[\sum_{k=1}^{10} \left[w_k \cdot K0 \left[\left(rb^2 + u \cdot k \cdot 2.77259 \right)^{0.5} \right] \right] \right] \left[1 - \left(\tanh \left(\frac{u}{2} \right) \right)^9 \right] + \left[\frac{Wlag3(u)}{\left(e^{\left(\frac{Wlag3(u) \cdot e^u \cdot rb^2}{4} \right)} \right)} \right] \left(\tanh \left(\frac{u}{2} \right) \right)^9 \quad (30)$$

Donde: $Wlag3(u)$ es la Ecuación (21).

$$Wurb2(u, rb) := \left[\sum_{k=1}^{N_{\text{pesos}}} \left[w_k \cdot K0 \left[\left(rb^2 + u \cdot k \cdot 2.77259 \right)^{0.5} \right] \right] \right] \left[1 - \left[\tanh(u) \right]^5 \right] + \left[\frac{1}{e^u} \cdot \sum_{i=1}^5 \left[\frac{wl5_i}{(u + xl5_i) \cdot e^{\left[\frac{rb^2}{4 \cdot (xl5_i + u)} \right]}} \right] \right] \left(\tanh(u) \right)^5 \quad (31)$$

Finalmente, la Figura 2 muestra el resultado de las simplificaciones (26) y (31), observándose la reproducción de las curvas clásicas reportadas en la literatura.

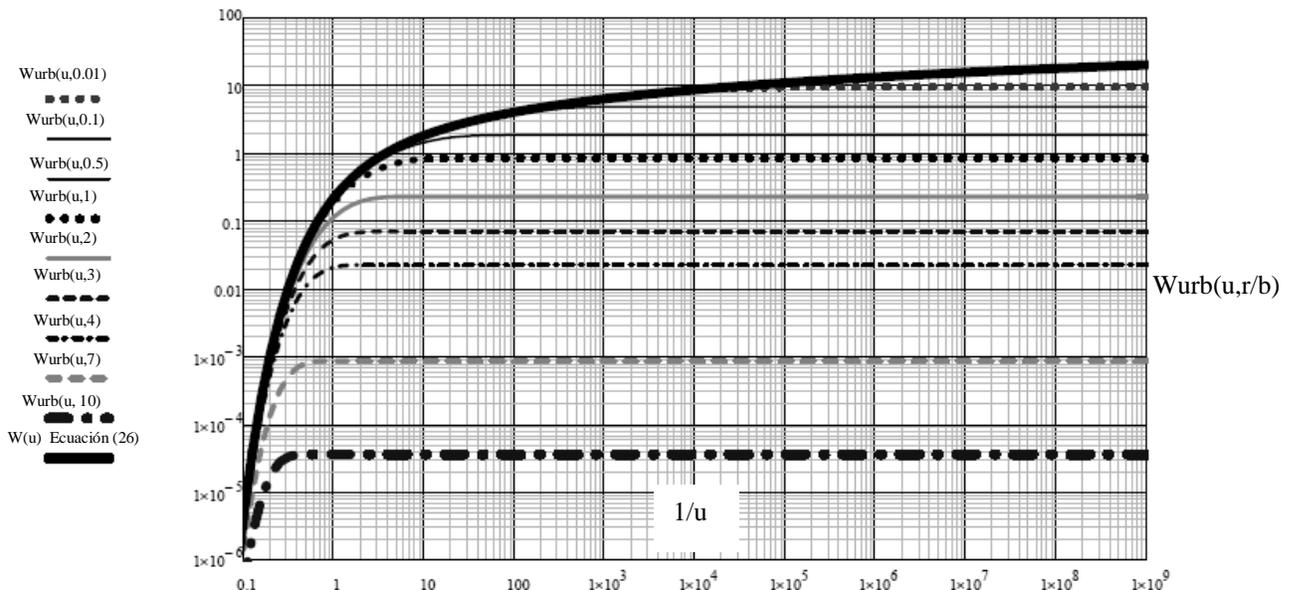


Figura 2. Representación gráfica de las funciones aproximadas de Theis y Hantush.

CONCLUSIONES

Se han encontrado nuevas simplificaciones prácticas de las formulaciones de Theis y Hantush que pueden ser fácilmente adaptables a hojas de cálculo y calculadoras programables.

Se lograron desarrollar funciones continuas en todo el dominio práctico de valores de u y r/b , que mediante operadores trigonométricos e hiperbólicos unen las tendencias asintóticas de las funciones estudiadas.

En acuíferos confinados, al disponer calculadoras programables para la búsqueda de la solución, se sugieren: la Ecuación (9) y (10) con un error relativo máximo $< 1\%$, como propuestas prácticas con validez para el dominio de valores de $u < 1.13$ y 2.15 , respectivamente. De igual forma, la Ecuación (23) con un error relativo máximo de $0,83\%$ y la (24) con un error máximo de $0,06\%$, como propuestas prácticas con validez para el dominio $0 \leq u \leq 100$.

En acuíferos confinados, al disponer de hojas de calculo para la búsqueda de la solución, se recomienda el uso de la Ecuación (26) que es válida para todo el dominio de u , con un error relativo máximo $< 0,03\%$.

En acuíferos semi confinados se recomienda cuando se disponga de hojas de calculo, el uso de la Ecuación (30) para cuando $r/b \leq 2.0$ y $0 \leq u \leq 100$, y la Ecuación (31) puede ser usada para valores de $r/b \leq 20$ y $0 \leq u \leq 100$, cuyos errores relativos son $< 1\%$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramovich, M. and I. A. Stegun. (1965). *Handbook of mathematical functions*. US Government Printing Office, Washington, DC, USA.
- Allen, E. E. (1954). *Analytical approximations*. MTAC, 8, N° 48: 240-241.
- Barry, D. A., J. Y. Parlange, and L. Li, (2000). *Approximations for the exponential integral (Theis well functions)*. Journal of Hydrology. 227, 287-291.
- Cody, W. J. and H. C., Thacher. (1968). *Rational Chebyshev approximations for the exponential integral $EI(x)$* . Math. Comp., 22, 641-649.
- Guilpin, C. (1999). *Manuel de calcul numérique appliqué*. EDP Sciences, France, 577 p.
- Hantush, M. S, and C. E. Jacob. (1955). *Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer*, American Geophysical. Union Trans., 36, 95-100.
- Hastings Jr., C. (1955). *Approximations for digital computers*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 201 p.
- NIST (2010) , Handbook of Mathematical Functions, Olver F, Lazier D, Boisvert R, Clark C. Editores. Cambridge University Press. New York
- Prodanoff, J. H. A., W. J. Mansur and F. C. B. Mascarenhas. (2006). *Numerical evaluation of Theis and Hantusch-Jacob well functions*. Journal of Hydrology, 318, 173-183.
- Stehfest, H. (1979). *Numerical Inversion of Laplace transforms*, Commun. ACM, 13(1), 47-49.
- Srivastava, R., and A. G. Guzman. (1998). *Practical Approximations of the well function*. Ground Water, Vol. 36, N° 5: 844-848.
- Swamee, P. K., and C. S. P., Ojha. (1990a). *Pump test analysis of confined aquifer*. Journal Irrigation and Drain. Engrg. 116, N° 1: 99-106.
- Swamee, P. K., and C. S. P., Ojha. (1990b). *Pump test analysis of leaky aquifer*. Journal Irrigation and Drain. Engrg. 116, N° 5: 645-655.
- Theis, C. V. (1935). *The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and the duration of discharge of well using groundwater storage*. American Geophysical Union Transactions., 16, 519-524.
- Tseng, P. H. and T. C. Lee. (1998). *Numerical evaluation of exponential integral: Theis well function approximation*. Journal of Hydrology, 205, 38-51.